



دوره جمع بندی دوپینگ

سه شنبه

۱۴۰۴/۰۱/۰۵

دفترچه پاسخ

بانک سوالات کنکور:

آمار و احتمال: فصل ۲ آمار و احتمال + فصل ۷ ریاضی  
دهم (صفحات ۱۴۱ تا ۱۵۱)  
هندسه: فصل ۱ یازدهم (درس سوم) + فصل ۲ یازدهم

# دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی  
ریاضیات

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
ریاضیات	۳۶	۱	۳۶	۶۳ دقیقه

گسسته و هندسه	آمار و احتمال + هندسه	آمار و احتمال + هندسه	گسسته و هندسه	-	گسسته و هندسه
هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم

۵۵ روز جمع بندی تا کنکور اردیبهشت

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



سوالات کنکور: ریاضی فصل ۷ دهم

۱- به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

- (۱)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{7}{15}$  (۴)  $\frac{8}{15}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۷) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۳

$n(S) = 90$  = تعداد اعداد دو رقمی

$$n(A) = \left[ \frac{99}{3} \right] - \left[ \frac{9}{3} \right] = 33 - 3 = 30$$

$n(A)$  = تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۳

$$n(B) = \left[ \frac{99}{5} \right] - \left[ \frac{9}{5} \right] = 19 - 1 = 18$$

$n(B)$  = تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۵

$$n(A \cap B) = \left[ \frac{99}{15} \right] - \left[ \frac{9}{15} \right] = 6$$

$n(A \cap B)$  = تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۳ و ۵

می خواهیم حالتی را حساب کنیم که عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ باشد، پس:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 18 - 6 = 42$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

گروه آموزشی ماز

۲- یک تاس سالم را سه بار به طور متوالی پرتاب می کنیم، احتمال رو شدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

- (۱)  $\frac{13}{36}$  (۲)  $\frac{41}{108}$  (۳)  $\frac{91}{216}$  (۴)  $\frac{31}{72}$

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۷) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۳

از اصل متمم استفاده می کنیم:

• تعداد کل حالتها:  $n(S) = 6^3 = 216$

• تعداد حالت هایی که در هیچ تاسی عدد ۶ ظاهر نشود:  $n(A') = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$$P(A) = 1 - \frac{n(A')}{n(S)} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

گروه آموزشی ماز

۳- دو تاس همگن را پرتاب می کنیم، با کدام احتمال، حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ است؟

- (۱)  $\frac{1}{18}$  (۲)  $\frac{1}{9}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

فضای نمونه پرتاب دو تاس  $n(S) = 36$

$$A = \{(3,4), (4,3), (1,6), (6,1)\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

گروه آموزشی ماز

۴- در یک گروه ۱۵۰ نفری دانش آموزی، ۴۰ نفر فقط بلیت فیلم «الف» و ۷۵ نفر فقط بلیت فیلم «ب» را خریداری کرده اند. اگر  $P(A)$  و  $P(B)$  به ترتیب

احتمال خرید بلیت فیلم های «الف» و «ب» باشند، بیشترین مقدار  $\frac{P(A)}{P(B)}$  کدام است؟

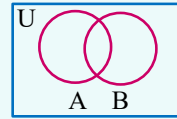
- (۱)  $\frac{15}{29}$  (۲)  $\frac{28}{45}$  (۳)  $\frac{8}{15}$  (۴)  $\frac{15}{22}$



(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

در هر مجموعه مرجعی مانند U همواره روابط زیر برقرارند:



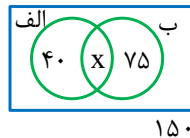
۱)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$   
 ۲)  $\max(n(A \cup B)) = n(U)$

برای حل بهتر است از نمودار استفاده کنید:

$40 + x + 75 \leq 150$

$x \leq 35 \Rightarrow x_{\max} = 35$

$\max\left(\frac{P(A)}{P(B)}\right) = \max\left(\frac{40+x}{75+x}\right)$



این عبارت زمانی max است که x بیشترین مقدار خود را داشته باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$\max\left(\frac{P(A)}{P(B)}\right) = \frac{40+35}{75+35} = \frac{75}{110} = \frac{15}{22}$

گروه آموزشی ماز

۵- تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۳ باشد، کدام است؟

$\frac{15}{36}$  (۴)

$\frac{23}{54}$  (۳)

$\frac{3}{4}$  (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

(دشوار - محاسباتی - ۱۰۰۷) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۳

تعداد	حالت‌ها	مجموع اعداد رو شده
—	—	۳
$\frac{3!}{2!} = 3$	۳, ۱, ۱	۵
۳	$\left\{ \begin{matrix} ۳, ۳, ۱ \\ ۳, ۲, ۲ \end{matrix} \right.$	۷
۱	$\left\{ \begin{matrix} ۳, ۳, ۳ \end{matrix} \right.$	۹
۶	$\left\{ \begin{matrix} ۳, ۵, ۱ \\ ۳, ۴, ۲ \end{matrix} \right.$	۹
۳	$\left\{ \begin{matrix} ۳, ۳, ۵ \\ ۳, ۴, ۴ \end{matrix} \right.$	۱۱
۶	$\left\{ \begin{matrix} ۳, ۲, ۶ \end{matrix} \right.$	۱۱
۳	$\left\{ \begin{matrix} ۳, ۵, ۵ \\ ۳, ۴, ۶ \end{matrix} \right.$	۱۳
۳	۳, ۶, ۶	۱۵
—	—	۱۷
۴۶ حالت		

می‌دانیم اگر تاسی را سه بار پرتاب کنیم فضای نمونه  $6^3 = 216$  عضو خواهد داشت که:

- در نصف حالت‌ها (۱۰۸)، مجموع اعداد رو شده، فرد است.
- در نصف حالت‌ها (۱۰۸)، مجموع اعداد رو شده زوج است.

در این سوال می‌دانیم که مجموع اعداد رو شده فرد است پس تعداد اعضای فضای نمونه ما  $n(S) = 108$  یعنی:

حال تعداد حالت‌هایی را می‌خواهیم که در آن‌ها، اولاً مجموع اعداد رو شده فرد باشد و ثانیاً حداقل یکی از آن اعداد، ۳ باشد، پس:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{46}{108} = \frac{23}{54}$



سؤالات کنکور: آمار احتمال فصل ۲ یازدهم

۶- در یک تجربه تصادفی،  $S = \{x, y, z\}$  یک فضای نمونه‌ای است. اگر  $P(x)$ ،  $P(y)$  و  $P(z)$  یک دنباله هندسی با قدرنسبت کمتر از واحد، تشکیل دهند و واسطه هندسی آن‌ها  $\frac{1}{5}$  باشد، کمترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در  $S$ ، چقدر است؟

$\frac{2-\sqrt{2}}{10}$  (۴)

$\frac{2-\sqrt{3}}{10}$  (۳)

$\frac{2-\sqrt{3}}{5}$  (۲)

$\frac{2-\sqrt{2}}{5}$  (۱)

(دشوار - محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$P(y) = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} S = P(x) + P(z) = \frac{4}{5} \\ P = P(x) \cdot P(z) = \frac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow t^2 - \frac{4}{5}t + \frac{1}{25} = 0 \Rightarrow 25t^2 - 20t + 1 = 0$$

$\Delta = (-20)^2 - 4(25) = 300$

$t = \frac{20 \pm 10\sqrt{3}}{50} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{5} \Rightarrow P(x) = \frac{2+\sqrt{3}}{5}, P(z) = \frac{2-\sqrt{3}}{5}$

توجه کنید که بیان صورت سؤال نادرست است.

گروه آموزشی ماز

۷- در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول ۵ لامپ و از جعبه دوم ۷ لامپ به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب است؟

$\frac{7}{24}$  (۴)

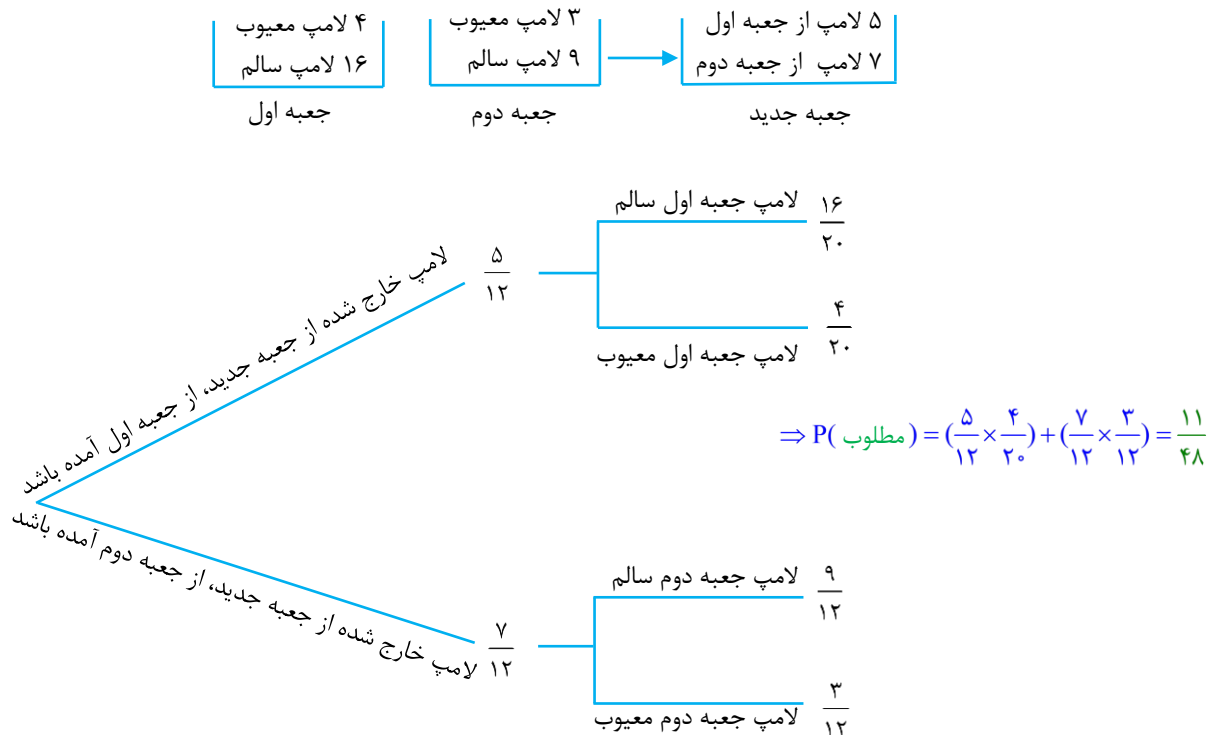
$\frac{13}{48}$  (۳)

$\frac{11}{48}$  (۲)

$\frac{5}{24}$  (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۲



گروه آموزشی ماز

۸- در دو پیشامد مستقل  $A$  و  $B$ ، اگر  $P(A \cap B) = 0/6$  و  $P(A \cap B') = 0/2$ ، آنگاه  $P(A \cup B')$ ، کدام است؟

$0/9$  (۴)

$0/85$  (۳)

$0/75$  (۲)

$0/7$  (۱)



(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم  $P(A \cap B') = 0/2$  است. پس:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0/2$$

$$P(A) - 0/6 = 0/2 \Rightarrow P(A) = 0/8$$

از طرفی دو پیشامد  $A$  و  $B$  از هم مستقل بوده و  $P(A \cap B) = 0/6$  است. پس:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0/6$$

$$0/8 \times P(B) = 0/6 \Rightarrow P(B) = \frac{0/6}{0/8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0/75$$

حال حاصل  $P(A \cup B')$  برابر است با:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

$$P(A \cup B') = 0/8 + (1 - 0/75) - 0/2 = 0/8 + 0/25 - 0/2 = 0/85$$

گروه آموزشی ماز

۹- در جعبه‌ای ۶ مهره سفید، ۴ مهره سیاه است. دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهره دوم، سفید است؟

۰/۷۲ (۴)

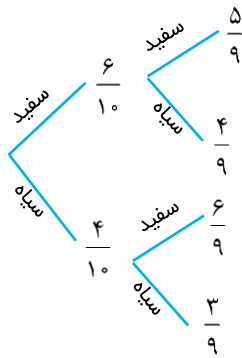
۰/۶۴ (۳)

۰/۶ (۲)

۰/۵ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۲



$$\Rightarrow P(\text{سفید بودن مهره دوم}) = \left(\frac{6}{10} \times \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{6}{9}\right) = \frac{30}{90} + \frac{24}{90} = \frac{54}{90} = 0/6$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره سفید، در دومی ۹ مهره سیاه و در سومی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

$\frac{13}{18}$  (۴)

$\frac{25}{36}$  (۳)

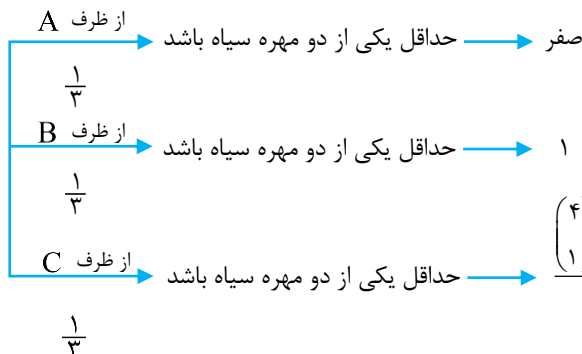
$\frac{11}{18}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم:



$$\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{(4 \times 5) + 10}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$P(\text{مطلوب}) = \left(\frac{1}{3} \times 0\right) + \left(\frac{1}{3} \times 1\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}\right) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18}$$



۱۱- A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر  $P(A) = 0/4$ ،  $P(B|A) = 0/25$  و  $P(B) = 0/3$  باشد،  $P(B|A')$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{5}$

(متوسط - مفهومی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم که  $P(A) = 0/4$  و  $P(B|A) = 0/25$  است. حال طبق رابطه احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0/25 = \frac{P(A \cap B)}{0/4} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/1$$

حال به سراغ خواسته سوال می‌رویم:

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0/3 - 0/1}{1 - 0/4} = \frac{0/2}{0/6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

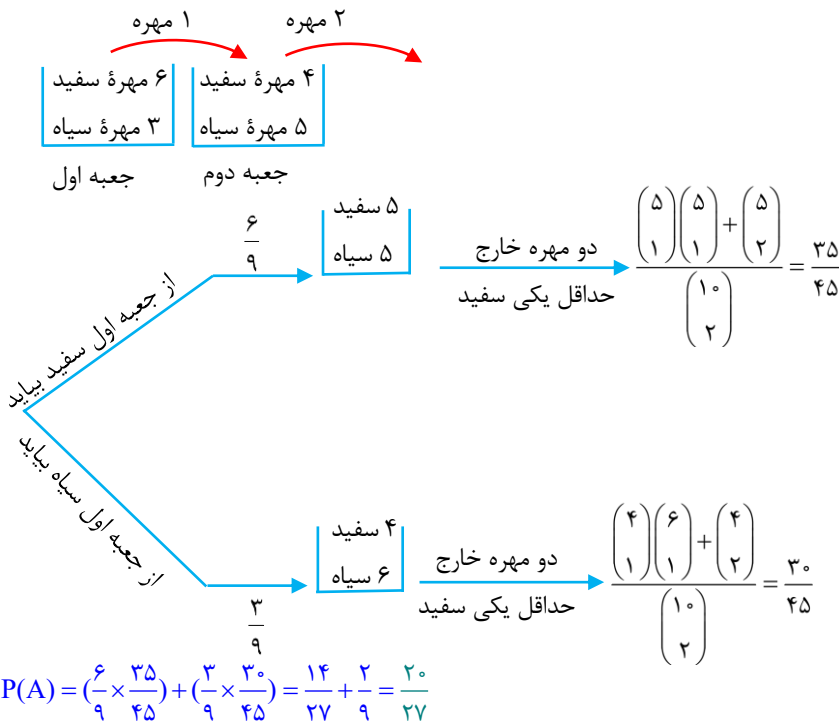
گروه آموزشی ماز

۱۲- در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبه دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

- (۱)  $\frac{20}{27}$  (۲)  $\frac{34}{45}$  (۳)  $\frac{38}{45}$  (۴)  $\frac{23}{27}$

(دشوار - محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۱ آزمون وی ای پی



جواب عبارت است از:

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی  $a > 9$  بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقیمانده آن باشد، احتمال این که عدد  $a - 9$  بر ۲۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{13}{22}$  (۲)  $\frac{6}{11}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{5}{11}$

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۲۰۱ و ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۲

نکته:

اگر  $a$  عددی صحیح و  $b$  عددی طبیعی باشد در این صورت اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند  $q$  و  $r$  یافت می‌شوند به قسمی که:

$$a = bq + r ; 0 \leq r < b$$



براساس گفته سوال و به کمک قضیه تقسیم:

$$\begin{cases} a = 11q + r; & 0 \leq r < 11 \\ q = r + 3 \end{cases} \Rightarrow a = 11(r+3) + r = 11r + 33 + r \Rightarrow a = 12r + 33$$

حال  $a - 9$  را می‌سازیم:

$$a - 9 = 12r + 33 - 9 \Rightarrow a - 9 = 12r + 24 \Rightarrow a - 9 = 12(r + 2)$$

با توجه به رابطه فوق برای اینکه عدد  $a - 9$  خواهد بر ۲۴ بخش پذیر باشد باید  $(r + 2)$  زوج باشد. پس:

$$\begin{cases} r + 2 = \text{زوج} \\ 0 \leq r < 11 \end{cases} \Rightarrow r \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$n(S) = 11$$

$$\Rightarrow P(\text{مطلوب}) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{11}$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده بیشتر از ۹ باشد، به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهره بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که مهره قرمز باشد، کدام است؟

$$\frac{180}{270} \quad (۴)$$

$$\frac{173}{270} \quad (۳)$$

$$\frac{165}{270} \quad (۲)$$

$$\frac{157}{270} \quad (۱)$$

(دشوار - محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

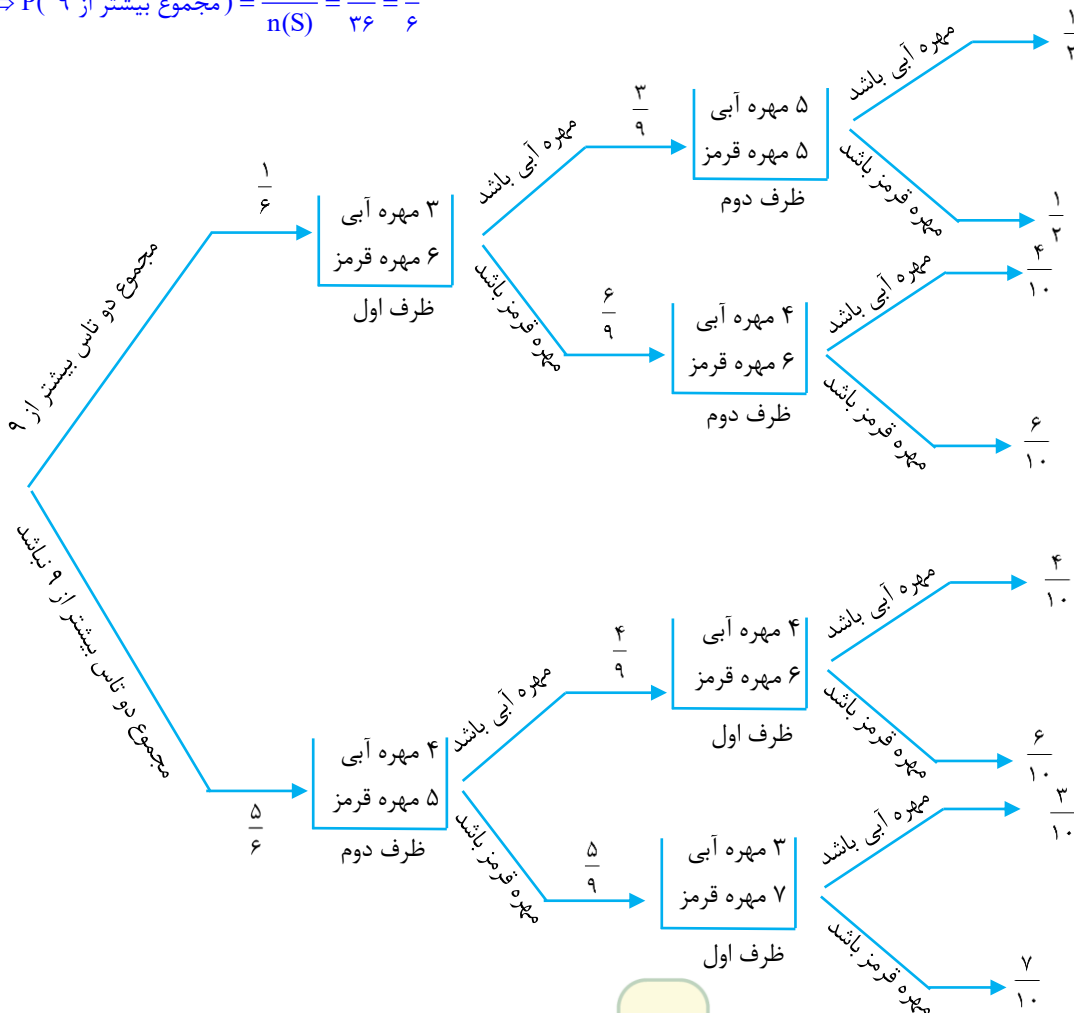
پاسخ: گزینه ۳

احتمال این که مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس بیشتر از ۹ باشد برابر است با:

$$\{(۴, ۶), (۶, ۴), (۵, ۵), (۵, ۶), (۶, ۵), (۶, ۶)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$\Rightarrow P(\text{مجموع بیشتر از ۹}) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$





$$P(\text{قرمز بودن}) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{9} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{6}{9} \times \frac{6}{10}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{4}{9} \times \frac{6}{10}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{9} \times \frac{7}{10}\right) = \frac{173}{270}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- روی هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۲ را نوشته و سپس در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس به دلخواه یک کارت از کیسه بیرون می‌آوریم. اگر عدد زوج باشد، یک عدد دیگر از کیسه بیرون می‌آوریم و در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. اگر عدد فرد باشد یک تاس پرتاب کرده و عدد رو شده را در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. سپس از اعداد ساخته شده، در همه حالت‌های ممکن، مجموعه A را تشکیل می‌دهیم. یک عدد از مجموعه A انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخابی بر ۴ بخش پذیر است؟

$\frac{2}{9}$  (۴)                       $\frac{9}{40}$  (۳)                       $\frac{1}{4}$  (۲)                       $\frac{9}{34}$  (۱)

(دشوار - محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۱

تعداد کارت‌های زوج با تعداد کارت‌های فرد برابر است که ۶ تای آن‌ها زوج {اعداد ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲} و ۶ تای آن‌ها فرد {اعداد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱} هستند.  
حالت اول:

کارت اول زوج باشد، که در این صورت باید یک عدد دیگر از کارت‌های کیسه بیرون بیاوریم که تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با:

$$n(S_1) = \frac{\text{کارت‌های باقی مانده}}{\text{حالت}} \times \text{حالت} = \frac{11}{6} \times 6 = 66$$

اعداد زوج

حال باید حالت‌هایی را پیدا کنیم که عدد حاصل شده از کنار هم قرار گرفتن کارت‌ها، بر ۴ بخش پذیر باشد. (توجه شود عددی بر ۴ بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش پذیر باشد)

کارت اول	۲	۲	۲	۴	۴	۶	۶	۶	۸	۸	۱۰	۱۰	۱۰	۱۲	۱۲	$n(A_1) = 15$
کارت دوم	۴	۸	۱۲	۸	۱۲	۴	۸	۱۲	۴	۱۲	۴	۸	۱۲	۴	۸	

حالت دوم:

کارت اول فرد باشد که در این صورت باید یک تاس را پرتاب کنیم که تعداد کل حالت‌های ممکن در این حالت برابر است با:

$$n(S_2) = \frac{\text{اعداد فرد}}{\text{حالت}} \times \frac{\text{عدد تاس}}{\text{حالت}} = \frac{6}{6} \times 6 = 36$$

کارت اول	۱	۱	۳	۳	۵	۵	۷	۷	۹	۹	۱۱	۱۱	$n(A_2) = 12$
عدد تاس	۲	۶	۲	۶	۲	۶	۲	۶	۲	۶	۲	۶	

$$P(A) = \frac{n(A_1) + n(A_2)}{n(S_1) + n(S_2)} = \frac{15 + 12}{66 + 36} = \frac{27}{102} = \frac{9}{34}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده ۷ یا ۱۰ باشد، به تصادف یک مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهره بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که مهره آبی باشد، کدام است؟

$\frac{11}{18}$  (۴)                       $\frac{19}{30}$  (۳)                       $\frac{11}{30}$  (۲)                       $\frac{7}{18}$  (۱)

(دشوار - محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۲

احتمال این که مجموع اعداد رو شده ۷ یا ۱۰ باشد برابر است با:

$$A = \{ \underbrace{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}_{\text{مجموع ۷}}, \underbrace{(4,6), (6,4), (5,5)}_{\text{مجموع ۱۰}} \} \Rightarrow P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$



$$P = \frac{1}{4} \times \frac{3}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{10}$$

آبی ↑ قرمز ↑ آبی ↑  
مجموع ۷ یا ۱۰ ↓ مجموع ↓ قرمز ↓

۷ یا ۱۰ نباشد

$$P = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{4}{9} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{10} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{15+24}{90} \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{16+15}{90} \right) = \frac{11}{30}$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به طور متوالی و بدون جایگذاری، به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم شماره گوی دوم از شماره گوی اول کمتر است، با کدام احتمال شماره گوی اول ۱۶ است؟

- (۱)  $\frac{1}{16}$       (۲)  $\frac{1}{12}$       (۳)  $\frac{1}{8}$       (۴)  $\frac{1}{4}$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$P(x=16 | x > y) = \frac{P(x=16, x > y)}{P(x > y)} = \frac{P(x=16)}{P(x > y)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- فرض کنید علی و حسن دو کماندار باشند که با احتمال‌های  $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{4}$  به هدف می‌زنند. اگر هر کدام از آن‌ها یک بار تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، با کدام احتمال علی به هدف زده است؟

- (۱)  $\frac{15}{19}$       (۲)  $\frac{5}{6}$       (۳)  $\frac{3}{5}$       (۴)  $\frac{17}{25}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$P(A | A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- یک دستگاه طوری طراحی شده که به تصادف یکی از دو حرف A یا B را از ورودی می‌گیرد و پس از طی سه مرحله حرفی را در خروجی چاپ می‌کند. در هر مرحله حرف ورودی با احتمال  $\frac{1}{4}$  بدون تغییر به مرحله بعد می‌رود یا به شکل حرف دیگری درآمده و به مرحله بعدی وارد می‌شود. اگر احتمال انتخاب حرف A، ۲ برابر حرف B باشد، با کدام احتمال، حرف «A» چاپ شده توسط دستگاه با حرف ورودی یکسان است؟

- (۱)  $\frac{14}{23}$       (۲)  $\frac{21}{23}$       (۳)  $\frac{9}{41}$       (۴)  $\frac{17}{41}$

(دشوار - محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

احتمال شرطی: در صورتی که B پیشامدی باشد که  $P(B) > 0$ ، برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط رخ دادن B» (که در آن «Pی A به شرط B» نیز می‌خوانیم) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



احتمال غیرهم‌شانس: از فضای نمونه‌ای متنهای با احتمال غیرهم‌شانس، اگر  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  فضای نمونه‌ای و  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  یک زیرمجموعه  $k$  عضوی  $S$  باشد، همواره داریم:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (۳) \quad P(S) = ۱ \quad (۲) \quad ۰ \leq P(A) \leq ۱ \quad (۱)$$

$$P(A) + P(B) = ۱ \Rightarrow ۲P(B) + P(B) = ۱ \Rightarrow \begin{cases} P(B) = \frac{1}{3} \\ P(A) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

با توجه به اطلاعات سوال، در نهایت حرف A چاپ شده است، بنابراین تمام حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم:

حالت‌ها	احتمال رخ دادن حالت
AAAA	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{192}$
ABAA	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{18}{192}$
AABA	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{18}{192}$
ABBA	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{18}{192}$
BAAA	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{192}$
BABA	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{192}$
BBAA	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{192}$
BBBA	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{192}$

پیشامدهای مطلوب

فضای نمونه‌ای

$$P(A \text{ چاپ شده است} \mid \text{آوردی } A \text{ باشد}) = \frac{2+18+18+18}{2+18+18+18+27+3+3+3} = \frac{56}{92} = \frac{14}{23}$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد فرد بیاید ۱ تاس دیگر پرتاب کرده و در غیراین صورت ۲ تاس پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال همه اعداد ظاهر شده یکسان هستند؟

$$\frac{5}{72} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{36} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{72} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{36} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲ | آزمون وی ای پی

احتمال کل

در مسائل مربوط به احتمال کل می‌خواهیم احتمال وقوع پیشامدی مانند A را به دست آوریم به طوری که قبل از آن پیشامدهای دیگری مانند  $B_1, B_2, \dots, B_n$  رخ داده باشند که در این صورت می‌توانیم از روش نمودار درختی استفاده کنیم. بدین صورت که اعداد موجود در هر شاخه را در هم ضرب و جواب‌ها را از شاخه‌ای به شاخه دیگر با هم جمع می‌کنیم.

$$\text{تاس را پرتاب می‌کنیم} \begin{cases} \text{فرد} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \\ \text{زوج} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{72} = \frac{7}{72}$$

گروه آموزشی ماز



۲۱- در جریان یک مسابقه بسکتبال در صورت خطا روی بازیکن در محوطه‌ای مشخص، دو پناستی پشت سر هم اعلام می‌شود. بازیکن A با احتمال ۸۰ درصد پناستی اول خود را گل می‌کند، در این صورت احتمال گل شدن پناستی دوم ۶۰ درصد و در غیر این صورت ۵۰ درصد خواهد بود. با کدام احتمال در خطای منجر به پناستی روی بازیکن A، حداقل یک پناستی گل می‌شود؟

۰/۸ (۴)

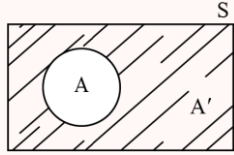
۰/۸۸ (۳)

۰/۹ (۲)

۰/۹۲ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲



احتمال متمم

اگر در مسائل احتمال، محاسبهٔ پیشامد A سخت و زمان‌بر باشد، از پیشامد متمم A یعنی A' استفاده می‌کنیم. ببینید:

$$A \cup A' = S \Rightarrow n(A) + n(A') = n(S) \xrightarrow{\div n(S)} P(A) + P(A') = 1$$

P(A): احتمال آن‌که پیشامد A رخ دهد.

P(A'): احتمال آن‌که پیشامد A رخ ندهد.

جمله‌ای تعیین‌کننده در احتمال متمم:

احتمال آن‌که هیچ‌کدام رخ ندهد  $\equiv 1 -$  احتمال آن‌که حداقل یکی رخ دهد

اگر A و B به ترتیب پیشامدهای گل شدن پناستی‌های اول و دوم باشند، آن‌گاه داریم:

$$P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B')$$

$$= 1 - P(A')P(B') = 1 - \frac{20}{100} \times \frac{50}{100} = 0.9$$

گروه آموزشی ماز

سوالات کنکور: هندسه فصل ۱ یازدهم

۲۲- اگر مساحت شش ضلعی منتظم محاط در یک دایره  $6\sqrt{3}$  باشد. آنگاه مساحت شش ضلعی منتظم محیط بر این دایره، چند برابر  $\sqrt{3}$  است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷/۵ (۲)

۷/۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱:

اگر یک n ضلعی منتظم به ضلع a در دایره به شعاع R محاط شود:

$$\begin{cases} a = 2R \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \\ S = \frac{n}{2} R^2 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \end{cases}$$

نکته ۲:

اگر یک n ضلعی منتظم به ضلع a بر دایره به شعاع R محیط شود:

$$\begin{cases} a = 2R \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \\ S = nR^2 \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \quad \text{یا} \quad S = \frac{n a R}{2} \end{cases}$$

طبق نکته ۱، می‌دانیم که مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{n}{2} R^2 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \xrightarrow{n=6} S = 2R^2 \sin 60^\circ \Rightarrow 6\sqrt{3} = 2R^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 2$$

و نیز طبق نکته ۲، مساحت n ضلعی منتظم محیط بر دایره به شعاع R برابر است با:

$$S = nR^2 \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R=2 \\ n=6 \end{smallmatrix}]{n=6} S = 6 \times 2^2 \times \tan 30^\circ = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- یک دوزنقهٔ متساوی‌الساقین با قاعده‌هایی به اندازه ۹ و ۱۶ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعدهٔ کوچک دوزنقه، کدام است؟

$\frac{5}{2}$  (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{3}$  (۲)

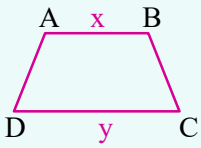
$\frac{3}{2}$  (۱)



(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۱

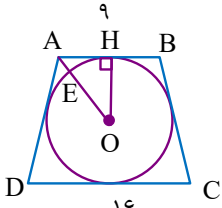
اگر دوزنقه‌ای هم محاطی و هم محیطی باشد، مساحت آن برابر است با:



$$S_{ABCD} = \frac{(x+y)\sqrt{xy}}{2}$$

با توجه به شکل، ما به دنبال AE هستیم و نیز می‌دانیم که دوزنقه متساوی‌الساقین یک چهار ضلعی محاطی است و از طرفی هم مطابق این سوال، بر دایره محیط شده است، لذا این دوزنقه هم محاطی و هم محیطی است، پس طبق نکته گفته شده مساحت آن برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{(x+y)\sqrt{xy}}{2} = \frac{(9+16)\sqrt{9 \times 16}}{2} = \frac{25 \times 12}{2} = 150$$



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(x+y) \times \underbrace{2R}_{\text{قطر دایره محاطی}}$$

$$\Rightarrow 150 = \frac{1}{2}(9+16) \times 2R \Rightarrow 150 = 25R \Rightarrow R = OH = OE = 6$$

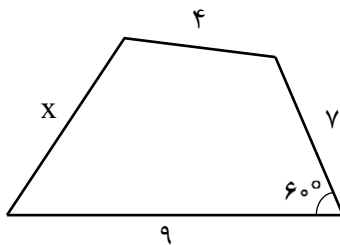
از طرفی یک رابطه دیگر نیز برای مساحت دوزنقه می‌توان نوشت:

از طرفی می‌دانیم که شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس، عمود است پس  $OH \perp AB$  بوده و مثلث  $\triangle OAH$  قائم‌الزاویه است و نیز می‌دانیم که چون دوزنقه متساوی‌الساقین است پس  $AH = HB = \frac{9}{2}$ ، حال طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle OAH$ :

$$OA^2 = AH^2 + OH^2 \rightarrow OA^2 = \frac{81}{4} + 36 \Rightarrow OA^2 = \frac{225}{4} \Rightarrow OA = \frac{15}{2} \Rightarrow AE = OA - OE = \frac{15}{2} - 6 = \frac{3}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- چهارضلعی زیر، قابل محاط در یک دایره است.  $(x+2)$  کدام است؟

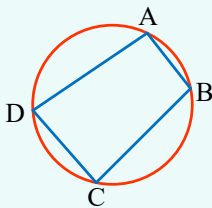


- (۱)  $\sqrt{51}$
- (۲)  $\sqrt{55}$
- (۳)  $\sqrt{75}$
- (۴)  $\sqrt{59}$

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۳ و ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

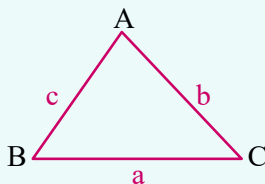
پاسخ: گزینه ۲

یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند. یعنی:



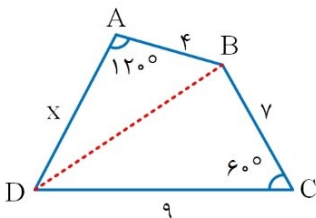
$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

قضیه کسینوس‌ها:



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$

چون چهارضلعی محاطی است پس:  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$





حال در دو مثلث  $\hat{A}BD$  و  $\hat{B}DC$ ، مطابق با قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$\hat{B}DC: BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \cdot DC \cos \hat{C} \Rightarrow BD^2 = 49 + 81 - 2(7)(9) \cos 60^\circ \Rightarrow BD^2 = 67$$

$$\hat{A}BD: BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD) \cos 120^\circ \Rightarrow 67 = 16 + x^2 - 2(4)(x)(-\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 51 = 0 \xrightarrow{\Delta=220} \begin{cases} x = -2 + \sqrt{55} \checkmark \\ x = -2 - \sqrt{55} \times \end{cases} \Rightarrow x + 2 = \sqrt{55}$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های  $\frac{9}{2}$  و ۸ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله دورترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده بزرگ دوزنقه، کدام است؟

۷/۵ (۴)

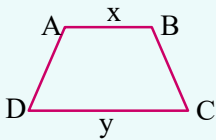
۸ (۳)

$3 + 4\sqrt{2}$  (۲)

۹ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

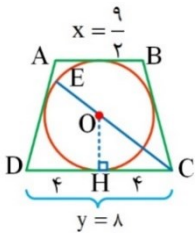
پاسخ: گزینه ۳



اگر دوزنقه‌ای هم محاطی و هم محیطی باشد، مساحت آن برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{(x+y)\sqrt{xy}}{2}$$

روش اول:



با توجه به شکل مقابل، ما دنبال فاصله EC هستیم:  $EC = EO + OC$

می‌دانیم که دوزنقه متساوی الساقین یک چهارضلعی محاطی است و از طرفی هم بر دایره محیط شده است، لذا این دوزنقه هم محاطی و هم محیطی است. بنابراین مساحت آن برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{(x+y)\sqrt{xy}}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(\frac{9}{2} + 8)\sqrt{\frac{9}{2} \times 8}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{25}{2} \times 6 = \frac{75}{2}$$

از طرفی یک رابطه دیگر نیز برای مساحت این دوزنقه می‌توان تشکیل داد:

$$S_{ABCD} = \frac{(x+y)}{2} \times \underbrace{2R}_{\text{قطر دایره محاطی}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(\frac{9}{2} + 8)}{2} \times 2R = \frac{75}{2} \Rightarrow \frac{25}{2} \times R = \frac{75}{2} \Rightarrow R = \frac{75}{25} = 3$$

می‌دانیم شعاع دایره، در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. پس  $OH \perp DC$  بوده و مثلث OHC قائم‌الزاویه است و چون  $OH = R = 3$  است، لذا مطابق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OHC، اندازه  $OC = 5$  به دست می‌آید. پس:

$$EC = EO + OC = 3 + 5 = 8$$



روش دوم:

اگر دوزنقه متساوی الساقینی به طول قاعده‌های  $a$  و  $b$  بر دایره‌ای به شعاع  $R$  محیط باشد، آنگاه داریم:

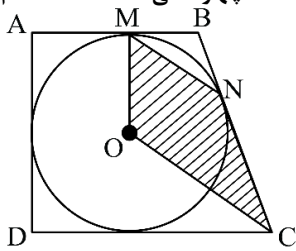
$$4R^2 = ab$$

$$4R^2 = \frac{9}{2} \times 8 = 36 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$$

بقیه راه‌حل به صورت روش اول می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۲۶- مطابق شکل زیر دوزنقه قائم‌الزاویه  $ABCD$  بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است. اگر زاویه  $\hat{M}BN = 12^\circ$  باشد، مساحت چهارضلعی  $OMNC$ ، کدام است؟



$$\frac{9\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$9\sqrt{3} \quad (4)$$

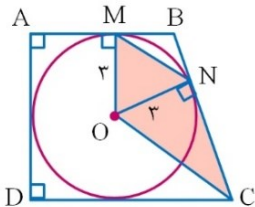
$$\frac{27\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

$$\frac{27\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

(دشوار - محاسباتی - ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۱ آزمون وی ای پی

با توجه به شکل زیر، به موارد زیر می‌توان اشاره کرد:



- می‌دانیم که اگر از یک نقطه خارج از دایره، دو مماس بر دایره رسم کنیم، اندازه دو مماس رسم شده با هم برابر است. بنابراین در شکل فوق  $BM = BN$  بوده مثلث  $BMN$  یک مثلث متساوی‌الساقین است و چون در این مثلث  $\hat{B} = 12^\circ$  است. پس:  $\hat{B}MN = \hat{B}NM = 30^\circ$
- از طرفی، می‌دانیم که شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. لذا:

$$\begin{cases} \hat{O}NB = 90^\circ \\ \hat{B}NM = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{O}NM = 60^\circ \quad \begin{cases} \hat{O}MB = 90^\circ \\ \hat{B}MN = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{O}MN = 60^\circ$$

بنابراین مثلث  $OMN$  متساوی‌الاضلاع است، پس:

$$S_{\triangle OMN} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \xrightarrow{a=3} S_{\triangle OMN} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

میدانیم که اگر یک چند ضلعی، بر دایره‌ای محیط شود، نیمسازهای داخلی همه زاویه‌های آن چند ضلعی، در مرکز دایره هم‌رسانند، بنابراین می‌توان گفت که  $OC$ ، نیمساز زاویه  $\hat{C}$  است.

از طرفی در هر دوزنقه‌ای زوایای مجاور به هر ساق، مکمل هستند و چون  $\hat{B} = 12^\circ$  است، بنابراین  $\hat{C} = 6^\circ$  بوده و به علت اینکه  $OC$  نیمساز زاویه  $\hat{C}$  است پس  $\hat{O}CN = 30^\circ$  است. پس در مثلث قائم‌الزاویه  $ONC$  داریم:

$$\tan \hat{C} = \frac{ON}{NC} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{3}{NC} \Rightarrow NC = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

بنابراین مساحت مثلث قائم‌الزاویه  $ONC$  برابر است با:

$$S_{\triangle ONC} = \frac{1}{2} \times ON \times NC = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

و در نهایت مساحت چهارضلعی  $OMNC$  برابر است با:

$$S_{OMNC} = S_{\triangle ONC} + S_{\triangle OMN} = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

گروه آموزشی ماز



۲۷- یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های  $a$  و  $6$  واحد، بر دایره‌ای به مساحت  $15\pi$  محیط است. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{25}{3}$       (۲)  $8$       (۳)  $\frac{32}{3}$       (۴)  $10$

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

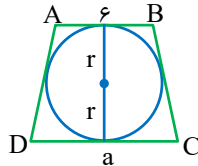
پاسخ: گزینه ۴

نکته:

در دوزنقه متساوی الساقین محیطی، حاصل ضرب دو قاعده مربع ارتفاع وارد بر قاعده است.

$$\pi r^2 = 15\pi \rightarrow r^2 = 15$$

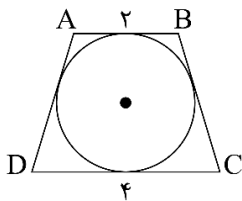
$$(2r)^2 = 6a \rightarrow a = \frac{4r^2}{6} = \frac{4 \times 15}{6} = 10$$



گروه آموزشی ماز

۲۸- در شکل زیر، دوزنقه متساوی الساقین ABCD، بر دایره‌ای محیط شده است. مساحت این دایره کدام است؟

- (۱)  $2\pi$       (۲)  $4\pi$       (۳)  $6\pi$       (۴)  $8\pi$



(آسان - محاسباتی - ۱۱۰) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

قطر دایره محاطی یک دوزنقه متساوی الساقین، واسطه هندسی بین طول‌های دو قاعده دوزنقه است.

$$(2R)^2 = AB \times CD \Rightarrow 4R^2 = 8 \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = 2\pi$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- یک پنج ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

- (۱)  $540^\circ$       (۲)  $180^\circ$       (۳)  $720^\circ$       (۴)  $360^\circ$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱:

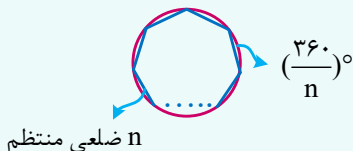
زاویه محاطی: زوایای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل ۲ وتر از دایره باشند:

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BDC}}{2}$$

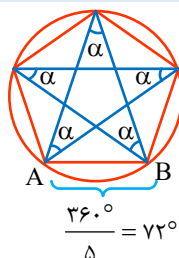
اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان مقابل به آن است.

نکته ۲:

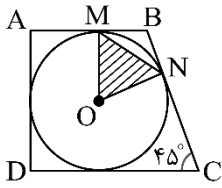
اگر یک  $n$  ضلعی منتظم را در داخل یک دایره محاط کنیم، اندازه کمان متناظر با هر ضلع  $n$  ضلعی برابر  $\frac{360^\circ}{n}$  خواهد بود.



$$\Rightarrow \text{مجموع زوایای محاطی} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$



در نتیجه، مجموع زوایای محاطی  $5 \times 36 = 180^\circ$  خواهد بود.



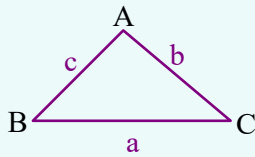
۳۰- مطابق شکل زیر، در دوزنقه ABCD دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت مثلث OMN، کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- (۲)  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
- (۳)  $\frac{9\sqrt{2}}{4}$
- (۴)  $\frac{9\sqrt{2}}{8}$

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

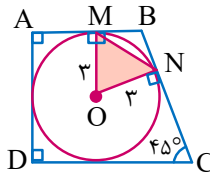
نکته ۱: در هر دوزنقه زوایای مجاور به یک ساق مکمل هم‌اند.  
نکته ۲: شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.  
نکته ۳: در هر مثلث:



$$S_{\triangle ABC} = \begin{cases} \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \\ \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \\ \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} \end{cases}$$

در هر دوزنقه، زاویه‌های مجاور به یک ساق، مکمل‌اند، پس:

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 135^\circ$$



از طرفی می‌دانیم که شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. بنابراین در چهارضلعی OMBN دو زاویه M و N قائمه بوده، لذا  $\hat{O} = 45^\circ$  است، پس:

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

سوالات کنکور: هندسه فصل ۲ یازدهم

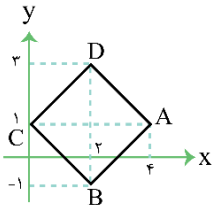
۳۱- در مربع ABCD، نقطه (۴، ۱) رأس A و عرض رأس‌های C و D به ترتیب ۱ و ۳ است. اگر بازتاب نقطه C نسبت به محور yها بر خودش منطبق شود، فاصله بازتاب نقطه D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات چقدر است؟

- (۱)  $\sqrt{5}$
- (۲)  $\sqrt{13}$
- (۳)  $\sqrt{17}$
- (۴)  $\sqrt{7}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

چون بازتاب نقطه C نسبت به محور yها روی خودش منطبق می‌شود، در نتیجه روی محور yهاست. مختصات نقطه C به صورت  $C(0, 1)$  خواهد شد. به شکل زیر دقت کنید:



قطر BD عمود منصف قطر AC است، پس داریم:

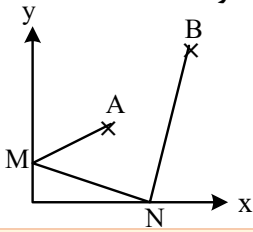
$$x_D = x_B = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2 \Rightarrow D(2, 2)$$

نقطه B بازتاب D نسبت به قطر AC است در نتیجه  $OB = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

گروه آموزشی ماز



۳۲- نقاط  $A \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$  و  $B \begin{vmatrix} 9 \\ 11 \end{vmatrix}$  در صفحه محورهای مختصات مفروض اند، دو نقطه  $M$  و  $N$  همواره روی دو محور می لغزند. کمترین اندازه خط شکسته  $AMNB$

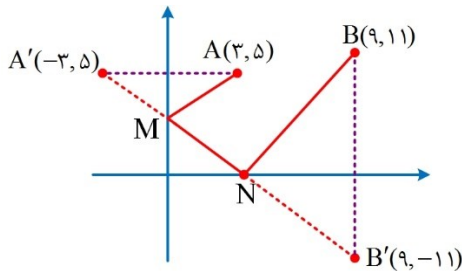


- کدام است؟
- ۱۸ (۱)
  - ۱۹ (۲)
  - ۲۰ (۳)
  - ۲۱ (۴)

(متوسط - مفهومی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نقطه  $B$  را نسبت به محور  $x$  ها و نقطه  $A$  را نسبت به محور  $y$  ها قرینه می کنیم:

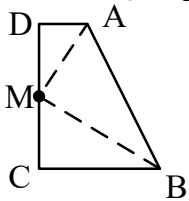


حال مطابق شکل  $A'$  را به  $B'$  وصل می کنیم بنابراین کمترین اندازه خط شکسته  $AMNB$ ، طول  $A'B'$  خواهد بود:

$$\begin{matrix} A'(-3, 5) \\ B'(9, -11) \end{matrix} \Rightarrow A'B' = \sqrt{(9+3)^2 + (-11-5)^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

گروه آموزشی ماز

۳۳- در دوزنقه قائم الزاویه  $ABCD$ ، اندازه های  $AD=2$  و  $CB=CD=6$  هستند. نقطه  $M$  روی ساق قائم  $CD$  متحرک است. کمترین مقدار  $MA+MB$

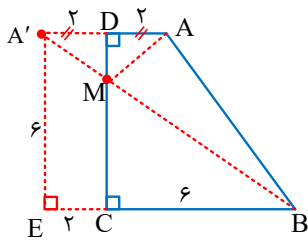


- کدام است؟
- ۱۰ (۱)
  - ۱۰/۵ (۲)
  - ۱۱ (۳)
  - ۱۱/۵ (۴)

(متوسط - مفهومی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا  $A$ ، را نسبت به  $DC$  بازتاب می دهیم تا نقطه  $A'$  به دست آید. کمترین مقدار  $MA+MB$ ، طول  $A'B$  است.



حال در مثلث قائم الزاویه  $A'EB$  داریم:

$$(A'B)^2 = (A'E)^2 + (EB)^2 \Rightarrow (A'B)^2 = (6)^2 + (8)^2 = 100 \Rightarrow A'B = 10$$

گروه آموزشی ماز

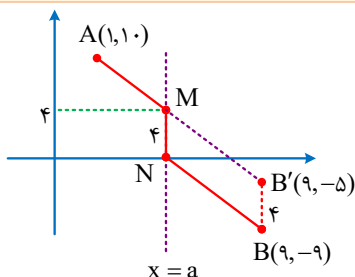
۳۴- چهار نقطه  $A(1, 10)$ ،  $B(9, -9)$ ،  $M(a, 4)$  و  $N(a, 0)$  را در صفحه مختصات، در نظر بگیرید. کمترین اندازه خط شکسته  $AMNB$  کدام است؟

- ۱۸ (۴)
- ۱۹ (۳)
- ۲۰ (۲)
- ۲۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۱۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به شکل مقابل داریم:





نقطه B را ۴ واحد در راستای MN، به سمت بالا منتقل می کنیم تا نقطه B' به دست بیاید: B'(۹, -۵)  
پس کمترین اندازه خط شکسته AMNB برابر است با:

$$AM + MN + NB = AB' + B'B \quad (*)$$

$$AB' = \sqrt{(-5-1)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17 \xrightarrow{(*)} AB' + B'B = 17 + 4 = 21$$

گروه آموزشی ماز

۳۵- چهار نقطه A(۱,۳), B(۱۵,۹), M(a,۰) و N(a+۵,۰) در صفحه مختصات مفروض اند. کمترین اندازه خط شکسته AMNB کدام است؟

۲۱ (۴)

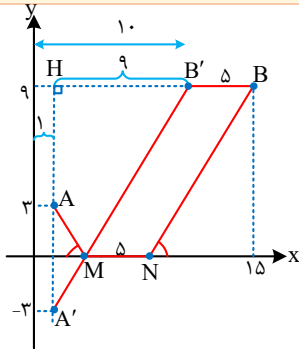
۲۰ (۳)

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

(دشوار - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۳



ابتدا مطابق شکل زیر، نقاط داده شده را مشخص می کنیم.  
سپس بازتاب نقطه A را نسبت به محور xها پیدا می کنیم و آن را A' می نامیم.  
حال نقطه B را ۵ واحد در راستای محور xها و در جهت منفی انتقال داده و آن را B' می نامیم.  
اگر از نقطه A' به B' وصل می کنیم محور xها را در نقطه M قطع می کند  
و اگر از نقطه M به اندازه ۵ واحد در راستای محور xها و در جهت مثبت حرکت کنیم به نقطه N خواهیم رسید.

پس:

$$AMNB \text{ کمترین اندازه خط شکسته} : \underbrace{AM}_{A'M} + \underbrace{MN}_{5} + \underbrace{NB}_{MB'} = A'M + MB' = A'B' + 5 \quad (*)$$

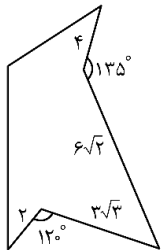
حال در مثلث قائم الزویه A'HB' داریم:

$$\text{فیثاغورس} : (A'B')^2 = (B'H)^2 + (A'H)^2 \Rightarrow (A'B')^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow A'B' = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$$

بنابراین مطابق رابطه (\*) داریم:

$$AMNB \text{ کمترین اندازه خط شکسته} : A'B' + 5 = 15 + 5 = 20$$

گروه آموزشی ماز



۳۶- میزان افزایش مساحت شکل زیر، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کدام است؟

۱۶/۵ (۱)

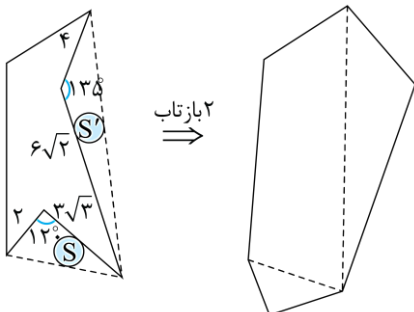
۱۹/۵ (۲)

۲۳ (۳)

۲۹ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳



$$\Delta S = 2S + 2S' = 2(2 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \sin 120^\circ) + 2(4 \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \sin 135^\circ) = 9 + 24 = 33$$

گروه آموزشی ماز